

# 南京航空航天大学

## 2013 年硕士研究生入学考试初试试题 ( A 卷 )

科目代码: 601

科目名称: 数学分析

满分: 150 分

注意: 认真阅读答题纸上的注意事项; 所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

- (12 分) 用极限定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  不存在。
- (12 分) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ 。
- (13 分) 设函数  $f(x)$  定义在闭区间  $[a, b]$  上, 且单调递增。证明:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续的充分必要条件是  $f(x)$  的值域为闭区间  $[f(a), f(b)]$ 。
- (13 分) 证明: 一个数列  $\{a_n\}$  存在收敛的子列当且仅当  $\{a_n\}$  不是无穷大量。
- (12 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内存在导函数  $f'(x)$ , 证明  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内或者连续, 或者有第二类间断点。
- (13 分) (1) 先计算积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。  
(2) 再先计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$ 。
- (12 分) 将函数  $(x) = \arcsin x$  在  $x=0$  展成为幂级数, 并证明其在  $[0, 1]$  上一致收敛。
- (12 分) 证明函数  $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$  在  $(0, +\infty)$  连续。
- (12 分) 设  $u = x^2 + y^2 + z^2$ , 其中  $z = f(x, y)$  是由方程  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  所确定的隐函数, 求  $u_x, u_y$ 。
- (13 分) 计算曲线积分  $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 其中  $L$  是维维安尼曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax (z > 0, a > 0)$ , 若从  $x$  轴正向看去,  $L$  是沿逆时针方向进行的。

11. (13分) 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (a+z)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$  ( $a > 0$ ), 其中  $\Sigma$  是下半球面

$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 方向取上侧。

12. (13分) 已知  $f(x)$  在  $(0, \pi/2)$  可积或者绝对可积, 应分别对它进行怎样的延拓, 才能使它在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数的形式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x?$$