南京航空航天大学

2014 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码: 601
科目名称: 数学分析
满分: 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1. （12 分）求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$；

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$，其中 $a\neq 0$ 为常数。

2. （13 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p},\quad p\in N, q\in Z, (p,q)=1, \\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$ 的连续性.

3. （12 分）设 $0<x<y<1$，证明 $\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^x}{x^y}$。

4. （13 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可微，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

5. （12 分）求不定积分 $\int\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$

6. （13 分）设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a,+\infty)$ 上，并且 $f(x)\geq 0$. $b>a$ 是常数.

(1) 举例说明：广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^b f^2(x)dx$ 不收敛；

$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不收敛.

(2) 证明：如果 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(3) 假设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有界，且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，证明：对任意常数 $p>1$，积分 $\int_a^{+\infty} f^p(x)dx$ 收敛.

7. （12 分）判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的一致收敛性。

8.（13 分）函数 $f(t)$ 以 2π 为周期，在$[-\pi，\pi)$ 内 $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[-\pi,0), \\ 0, & t\in[0,\pi). \end{cases}$ 把 $f(t)$ 展成 Fourier 级数.

9．（13 分）证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在(0,0)不连续，而 f 在原点(0,0)可微.

10．（12 分）通过自变量变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+2y \end{cases}$，变换方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y},y>0$.

11．（12 分）利用极坐标变换计算重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域。

12．（13 分）设 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$, G 为不包含原点的单连通域，任取 $M,N\in G$，在 G 内曲线积分 $\int_M^N \dfrac{1}{2x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$ 与路径无关.

(1)求 $f(x)$ ；（2）求 $\int\limits_\Gamma \dfrac{1}{x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$, 其中 Γ 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, 取正向.